



Profesores: Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Richard Weber, Gabriel Weintraub
Auxiliares: Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Andrés Pardo, Juan Pablo Troncoso, Richard Vega

I

- (1,5 pts.) Comente la siguiente afirmación: “Si un problema lineal tiene solución (finita) entonces el valor óptimo se alcanza exclusivamente en un punto extremo del poliedro factible”.
- (1,5 pts.) En la fase II del algoritmo SIMPLEX, ¿por qué es posible asegurar que en todo momento se está dentro de la región factible?
- (1,5 pts.) Considere el poliedro definido por $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in M_{m,n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que conoce un vértice $v \in P$ y su respectiva base $B_v \in M_{m,m}$ formada a partir de columnas de la matriz A . Diseñe un algoritmo que permita encontrar todos los vértices adyacentes a v .
- (1,5 pts.) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se define $\text{car}(S)$ como el conjunto de todas las direcciones de no-acotamiento de S , o sea, $\text{car}(S) = \{y \in \mathbb{R}^n / x + \lambda y \in S, \forall x \in S, \forall \lambda \geq 0, y \neq 0\}$. Para poliedros del tipo $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ con $A \in M_{m,n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ se puede demostrar que $\text{car}(P) = \{d \in \mathbb{R}^n / Ad \leq 0, d \geq 0, d \neq 0\}$. Utilice lo anterior para demostrar que el siguiente problema lineal siempre tiene solución (finita) para cualquier vector de costos c :

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad & \min c^T x \\ \text{s/a} \quad & 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Generalice ahora para cualquier problema lineal en donde $A \geq 0, b \geq 0$. En otras palabras, demuestre que si $A \geq 0, b \geq 0$ entonces el problema lineal (PL)

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ \text{s/a} \quad & Ax \leq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

siempre tiene solución (finita) independiente del vector de costos c .

II

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Max } z = & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -3x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & -4x_1 - 7x_2 \geq -7 \\ & -12x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

- (1 pts.) Transforme este problema llevándolo a la forma estándar.
- (2 pts.) Bajo esta nueva forma (estándar), resuelva el problema a través del algoritmo simplex (no está permitido el uso de calculadora). En cada iteración especifique cuáles son las variables básicas, las variables no básicas, la variable que entra y la variable que sale. Además especifique el valor de cada una de las variables básicas y el valor de la función objetivo en cada iteración.
- (1 pts.) Bajo esta nueva forma verifique la existencia de múltiples soluciones.
- (1 pts.) ¿Por qué la situación observada, es decir, aquella que usted describe en la parte c, era obvia de esperar?
- (1 pts.) Determine la solución factible óptima y el valor de la función objetivo del problema original.

III

Un problema fundamental en el diseño urbano es la localización de servicios básicos como colegios, hospitales y áreas recreacionales. En este problema formularemos un modelo simplificado para decidir la localización de estaciones de bomberos en una ciudad.

La ciudad se puede dividir en I distritos, en que cada uno contiene p_i habitantes. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las estaciones de bomberos sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad. Sea d_{ij} la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j .

Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir una estación (en un sitio cabe a lo más una) y además se debe asignar una estación a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener una (y sólo una) estación de bomberos asociada. Una estación puede tener más de un distrito asociado.

Construir una estación en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j . Además, existe un costo variable que es linealmente proporcional (constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de gente que debe servir la estación. O sea, si se construye una estación en el sitio j , entonces el costo asociado es $c_j + f \cdot s_j$, en que s_j es la población total que debe servir la estación ubicada en j (es la suma de las poblaciones de todos los distritos asociados a esa estación). El presupuesto total destinado para construir las estaciones de bomberos, el cual no debe ser sobrepasado, es igual a B .

- (1 pts.) ¿Cuáles son las variables de decisión del modelo?
- (0,5 pts.) En función de las variables de decisión (no necesariamente de todas), deduzca una expresión para la población total que debe servir la estación ubicada en el sitio j (s_j), suponiendo que ésta existe.
- (0,5 pts.) Utilizando $s_j, j \in [1, J]$, escriba la restricción presupuestaria.
- (0,5 pts.) En función de las variables de decisión (no necesariamente de todas), escriba una expresión para la distancia desde el centro del distrito i hasta su estación de servicio asignada (d_i).
- (0,5 pts.) Sea $D \geq \max_{i \in [1, I]} d_i$, es decir, una distancia mayor que la máxima desde un distrito hasta su estación asignada. ¿Qué conjunto de restricciones definen a D (en función de d_i)?
- (0,5 pts.) Una posible función de “beneficio social” (función que considere al conjunto de la sociedad) es minimizar D . Entregue una interpretación para esta función objetivo, considerando que las facilidades por localizar son estaciones de bombero.
- (2,5 pts.) Formule un modelo de programación lineal binaria que minimice D y que satisfaga todas las restricciones mencionadas anteriormente (aproveche las partes anteriores de la pregunta y además no olvide otras restricciones que deben ser agregadas).

IV

Sea el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } f(x_1, x_2) = & x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resuélvalo aplicando los conceptos de Programación no lineal.

-
- Reclamo del Control 2 se realizará el día 22 de octubre a las 13:30 en el Hall Sur.
 - Notas y avisos de IN34A se encuentran en la página web del curso: dii.uchile.cl/~in34a

P1/

a) Falso. Lo que está garantizado y demostrado es que el valor óptimo (si existe) se alcanza al menos en un vértice de la región factible pero no es exclusivo. puede darse que el mismo valor óptimo también se alcance en otras puntas que no son vértices (tal es el caso cuando se tienen infinitas soluciones).

b) La Fase II comienza con un vértice factible y el criterio de salida de la base $\left(\min \left\{ \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \right\} \right)$ asegura que en las siguientes iteraciones se siguen cumpliendo las restricciones de igualdad ($AX=b$) y la no negatividad de las var. de decisión ($x \geq 0$).

c) Sin pérdida de generalidad se puede asumir que B_v está compuesta por las primeras m columnas de A .

Step 1) $W_v = \{\emptyset\}$ aquí se van a guardar todos los vértices adyacentes a v

(0) Sea $i=1$ y $W_v = \{\emptyset\}$

(1) Sea $j=m+1$

(2) Reemplazar la columna $A_{.i}$ de B_v por la columna $A_{.j}$ y con ello generar una nueva matriz B .

(3) Si B^{-1} existe y $B^{-1}b \geq 0$ se tiene que $V' = (B^{-1}b, 0)$ es un vértice adyacente a V .

ojo: hay un pequeño recordatorio de las componentes que se puede obviar.

Hacer $W_v = W_v \cup \{V'\}$.

(4) Si $j < n$ hacer $j \leftarrow j+1$ e ir a (2)

(5) Si $i < m$ hacer $i \leftarrow i+1$ e ir a (1)

(6) Parar. W_v contiene todas las vértices adyacentes a V .

este algoritmo lo único que hace es ir cambiando ordenado los columnas de B_v y verificar si la matriz es invertible

d) Para (P1) se tiene que

1/5 pts) $\text{car}(P1) = \{ (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{aligned} 3d_1 + 5d_2 + d_3 &\leq 0 \\ 2d_1 + d_2 + 7d_3 &\leq 0 \\ d_1, d_2, d_3 &\geq 0, \text{ no todos } 0 \end{aligned} \}$

Claramente: $\text{car}(P1) = \emptyset$. Luego el problema (P1) es factible (el pto. (0,0) satisface las restricciones) y acotado (no tiene direcciones de "no-acotamiento"). Además los poliedros son conjuntos cerrados y las fns. lineales son trivialmente continuas.

los fns. continuos sobre el conjunto compacto \Rightarrow sea cual sea la función objetivo $C^T X$ esta tiene (alcanza) un mínimo (finito).
 \therefore (P1) siempre tiene soluz (finita).

Otra forma de verlo es acordarse de la clasificac de las PPL según su soluz: Se tenían cuatro casos:

- i) probl. infactible.
- ii) probl. no acotado
- iii) probl. con soln. finita única
- iv) probl. con soln. finita no única

Para (P1) se descartan los casos (i) y (ii) con lo cual queda claro que siempre tiene soluz finita (puede ser única o no, pero siempre es finita).

El caso gral. es totalmente analógico. Es fácil ver que (PL) es factible porque $X=0$ satisface $AX \leq b$ y $X \geq 0$. y nuevamente $\text{car}(PL) = \emptyset$ con lo cual se descarta el caso no acotado.

PAUTA PREGUNTA 2 SIMPLEX

Todas las partes valen 1 punto salvo la parte b que vale 2 puntos.

a) Existen cuatro aspectos que se deben corregir:

- El problema de maximización se debe transformar a un problema de minimización. Por lo tanto, $\max Z \Rightarrow -\min -Z$.
- Variable x_1 es no positiva. Por lo tanto, se debe definir una nueva variable $x_1' = -x_1$, reemplazándola en la formulación del problema anterior.
- La variable x_2 es irrestricta, por lo tanto, se debe escribir como la resta de 2 variables positivas. $x_2 = x_2' - x_3$.
- Las restricciones de desigualdad deben transformadas en restricciones de igualdad a partir de la inclusión de 3 variables de holgura x_4, x_5 y x_6 .

En resumen la forma estándar corresponde a:

$$-\text{Min } -Z = 8x_1' - 3x_2' + 3x_3$$

s.a.

$$3x_1' + 5x_2' - 5x_3 + x_4 = 10$$

$$4x_1' - 7x_2' + 7x_3 - x_5 = -7$$

$$12x_1' + x_2' - x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1', x_2', x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

b)

Primera Iteración:

Solución inicial:

(Por simplicidad de notación se llamará x_1 a x_1' y x_2 a x_2')

Variables básicas: x_4, x_5, x_6 .

Variables no básicas: x_1, x_2, x_3 .

Se reescribirá el sistema multiplicando la segunda restricción por (-1) (en cada restricción habrá una y sólo una variable básica con coeficiente 1:

$$-\text{Min } -Z = 8x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

s.a.

$$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 10$$

$$-4x_1 + 7x_2 - 7x_3 + x_5 = 7$$

$$12x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Valores de variables básicas: $x_4, x_5, x_6 = 10; 7; 6$

Función objetivo: $-Z = 0$.

Criterio de Optimalidad: Existe un costo reducido negativo \Rightarrow Solución actual no es óptima.

Variable Entrante = x_2 (menor costo reducido negativo)

Variable que sale:

$\text{Min}(10/5; 7/7; 6/1) = 1 \Rightarrow$ Sale x_5 .

Segunda Iteración:

Variables básicas: x_4, x_2, x_6 .

Variables no básicas: x_1, x_3, x_5 .

Mediante eliminación se llega a la siguiente forma canónica:

$$\begin{array}{rcll} -\text{Min-}z = & -3 & + & 8x_1 & + & 3x_3 & & & \\ \text{s.a.} & & & & & & & & \\ & 5,9 & x_1 & & + & x_4 & - & 0,71x_5 & = & 5 \\ & - & 0,57x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 0,14x_5 & = & 1 \\ & 12,5 & x_1 & & & & & - & 0,14x_5 & + & x_6 & = & 5 \\ & & & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \geq 0 \end{array}$$

Valores de variables básicas: $x_4, x_2, x_6 = 5; 1; 5$

Función objetivo: $-Z = -3$.

Criterio de Optimalidad: Los costos reducidos son no negativos \Rightarrow Solución es óptima.

- c) Efectivamente existen múltiples soluciones. Esto se puede advertir a partir del hecho de que el costo reducido de la variable no básica X_5 es cero.
- d) Esta situación era de esperarse debido a que al transformar el problema para llevarlo a su forma estándar se cambió la variable original x_2 irrestricta por la resta de dos variables no negativas. Bajo esta nueva forma un valor particular de la variable original x_2 se puede escribir de muchas maneras con las nuevas variables x_2' y x_3 . En este caso, en el óptimo $x_2' = 1$ y $x_3 = 0$ en la forma estándar. Lo que significa que la variable original $x_2 = 1 - 0 = 1$. Este valor de x_2 original se puede obtener también a partir de cualquier valores de x_2' y x_3 tales que su resta sea igual a 1. Por ejemplo, $x_2' = 2$ y $x_3 = 1$. De esta manera era obvio esperar múltiples soluciones para la forma estándar del problema.
- e) En el problema original: $x_1 = 0; x_2 = 1$ y $Z = 3$.

P3/

PAUTA - MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL BINARIA

CONTROL #2 99-2

a

(1 pto)

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si el sitio } j \text{ es escogido} \\ & \text{para construir una estación} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, J$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el distrito } i \text{ es asignado a la} \\ & \text{estación ubicada en el sitio } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, I \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J$$

b (0,5 pto) $S_j = \sum_{i=1}^I p_i \cdot X_{ij}$

c (0,5 pto) $\sum_{j=1}^J (c_j \cdot Y_j + f \cdot S_j) \leq B$

d (0,5 pto) $d_i = \sum_{j=1}^J d_{ij} \cdot X_{ij}$

e (0,5 pto) $D \geq d_i \quad i = 1, \dots, I$

f Al minimizar la distancia máxima desde un

se busca que ningún distrito quede "muy lejos" de una estación.
 Si así fuera, es probable que en caso de incendio, los bomberos llegarían "un poco tarde" a ese distrito, lo cual no es deseable desde el punto de vista social.

1) $\min D$
 s.a.

3. pto. lo el to de = parte 1 pto; icamente repetir partes (notas)

$$X_{ij} \leq Y_j \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (*)$$

o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^I X_{ij} \leq Y_j \cdot I \quad j=1, \dots, J \quad (**)$$

el distrito i se asigna a la estación ubicada en j , solo si ésta existe. (de lo mismo poner el qto. de estaciones $(*)$ el qto. $(**)$)

$$\sum_{j=1}^J X_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, I \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^J} \right\} \text{ todo distrito debe ser asignado a una estación.}$$

$$D \geq d_i \quad i=1, \dots, I$$

$$d_i = \sum_{j=1}^J d_{ij} \cdot X_{ij} \quad i=1, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^J (c_j \cdot Y_j + f \cdot s_j) \leq B$$

$$s_j = \sum_{i=1}^I p_i \cdot X_{ij} \quad j=1, \dots, J$$

$$Y_j, X_{ij} \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad \text{binarias.}$$

P4/

CONFIDENTIAL DE : P. Louca.
SOLUCION Pregunta M2

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 1/2 x_2^2 - x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} \text{1.a.} \quad & x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & -3x_1 - 2x_2 + 6 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

El hessian de la función objetivo es

$$H f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T H f(x_1, x_2) x = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Luego $f(x_1, x_2)$ es cóncava. Todas las restricciones son cóncavas.

Por tanto, si un punto factible satisface las condiciones de Karlin-Tucker entonces es óptimo global del problema.

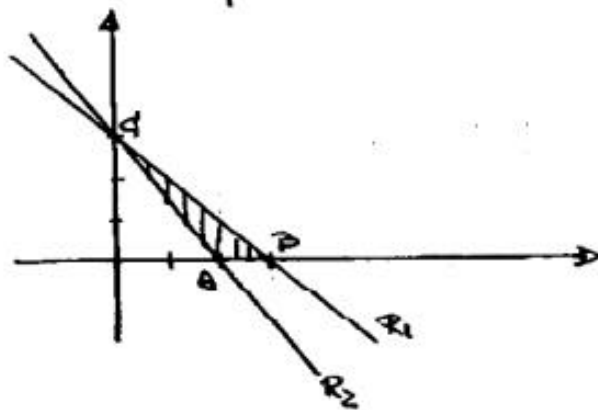
Las condiciones a satisfacer son:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & -3x_1 - 2x_2 + 6 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \exists y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 : \\ & y_1 (x_1 + x_2 - 3) = 0 \\ & y_2 (-3x_1 - 2x_2 + 6) = 0 \\ & y_3 (-x_1) = 0 \\ & y_4 (-x_2) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 1 \\ -x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gráficamente el espacio de soluciones factibles es:



Se puede verificar que un punto interior no cumple las condiciones planteadas. Tampoco las cumplen los puntos A, B, C.

Suponiendo la primera restricción activa y las (strict)-others tres no activas, se tiene:

De i) $y_1 + y_2 = 3$

De ii) $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

De iii)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 1 + y_1 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 + y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$x_1 = 6/5 \quad x_2 = 9/5 \quad y_1 = 2/5$$

Este punto \rightarrow óptimo global.